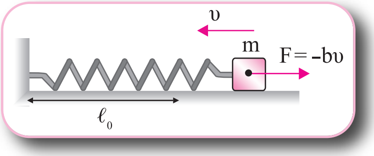
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο
ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ



Αν κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός ταλαντωτή υπάρχουν δυνάμεις που αντιστέκονται συνεχώς στην κίνησή του, τότε ο ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Το πλάτος στη φθίνουσα ταλάντωση συνεχώς μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί.

Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση στην οποία η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του ταλαντωτή έχει τη μορφή $\vec{F} = -b\vec{\upsilon}$, δηλαδή είναι συνέχεια αντίθετη της ταχύτητας, και το μέτρο της είναι ανάλογο με το μέτρο της ταχύτητας.

ΣΤΑΘΕΡΑ b

Η σταθερά αναλογίας **b** στον τύπο $\vec{F} = -b\vec{\upsilon}$ ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης**.

Μονάδα μέτρησης: 1 kg/s (SI)

$$\left(b = \frac{F}{\upsilon},\ \text{άρα: } \frac{N}{m \cdot s^{-1}} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2}}{m \cdot s^{-1}} = kg/s\right)$$

Η σταθερά b εξαρτάται:

α) από το σχήμα του ταλαντωτή,

β) από το μέγεθος του ταλαντωτή,

γ) από τις ιδιότητες του μέσου μέσα στο οποίο ταλαντώνεται το σώμα.

Για σταθερό b η περίοδος και η συχνότητα της ταλάντωσης παραμένουν σταθερές και είναι ανεξάρτητες από το πλάτος της ταλάντωσης.

Αύξηση της σταθεράς απόσβεσης

– Η περίοδος έχει μία μικρή αύξηση και η συχνότητα μία μικρή μείωση που θεωρούνται αμελητέες.

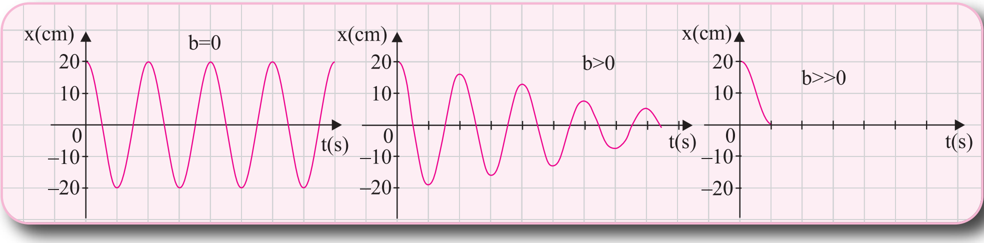
– Αυξάνεται ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος της ταλάντωσης.

Για πολύ μεγάλες τιμές του b η κίνηση γίνεται απεριοδική, δηλαδή ο ταλαντωτής επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ποτέ να την υπερβεί.

Θέλουμε η ταλάντωση να είναι απεριοδική στα αμορτισέρ του αυτοκινήτου, σε κρεμαστές γέφυρες, σε μεγάλες κατασκευές, στο τύμπανο του αυτιού μας. Αντίθετα, σε άλλες περιπτώσεις, όπως σε σύστημα εκκρεμές-ρολόι, ζητάμε ελαχιστοποίηση της απόσβεσης, δηλαδή πολύ μικρή τιμή της σταθεράς απόσβεσης b.

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται η μεταβολή του πλάτους για τις διάφορες τιμές του b.

Για b = 0 η ταλάντωση είναι αμείωτη, για b > 0 το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο και για πολύ μεγάλες τιμές του b η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.



ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Στην περίπτωση της φθίνουσας ταλάντωσης στο σώμα ασκούνται:

– Η δύναμη επαναφοράς ($F = -Dx$), που τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας, δηλαδή είναι η δύναμη λόγω της οποίας το σώμα εκτελεί ταλάντωση.

– Η δύναμη που αντιστέκεται στην ταλάντωση ($F = -b\upsilon$).

Επομένως, η συνισταμένη δύναμη είναι: $\mathbf{\Sigma F = -Dx - b\upsilon = m\alpha}$

ΠΛΑΤΟΣ

Το πλάτος **μειώνεται εκθετικά** και ακολουθεί τον νόμο: $\mathbf{A = A_0 e^{-\Lambda t}}$ (1)

Η σταθερά Λ εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b και τη μάζα του σώματος και έχει μονάδα 1 s^{-1}.

– Αν $t = N \cdot T$, όπου $N = 0, 1, 2, ...$, και T η περίοδος της ταλάντωσης, με τη σχέση (1) υπολογίζουμε τις μέγιστες απομακρύνσεις (πλάτη) προς την ίδια κατεύθυνση.

– Αν $t \neq N \cdot T$, τότε η σχέση (1) δίνει το πλάτος της αμείωτης ταλάντωσης που θα εκτελούσε το σώμα, αν τη χρονική στιγμή t η δύναμη $F = -b\upsilon$ έπαυε να ασκείται, οπότε η ταλάντωση θα γινόταν απλή αρμονική.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Εάν Ε η ενέργεια της ταλάντωσης σε μία χρονική στιγμή κατά την οποία το πλάτος είναι Α, ισχύει: $E = \frac{1}{2}DA^2$ (2)

Αλλά $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, άρα η σχέση (2) γίνεται: $E = \frac{1}{2} D \left(A_0 e^{-\Lambda t}\right)^2$ ή $E = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t}$ ή

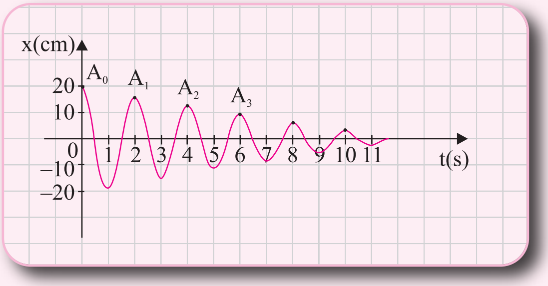
$\mathbf{E = E_0 e^{-2\Lambda t}}$, όπου $E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$ η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης.

Όπως φαίνεται, η ενέργεια –όπως και το πλάτος– μειώνεται εκθετικά και όχι γραμμικά. Η μείωση της ενέργειας οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση, μέσω του έργου της, αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα και τη μετατρέπει σε θερμότητα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Σχέση πλατών

Από τη σχέση $\mathbf{A = A_0 e^{-\Lambda t}}$ προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός:



$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots = \frac{A_0}{A_0 e^{-\Lambda t}} = e^{\Lambda T}$$

ή $A_1^2 = A_0 \cdot A_2$, $A_2^2 = A_1 \cdot A_3$

και γενικά $\mathbf{A_\nu^2 = A_{\nu-1} \cdot A_{\nu+1}}$

2. Χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους

Είναι ο χρόνος t που απαιτείται ώστε το πλάτος να γίνει το μισό του αρχικού. Από τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ για $A = \frac{A_0}{2}$ έχουμε:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \text{ ή } \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \text{ ή } e^{\Lambda t} = 2 \text{ ή } \Lambda t = \ln 2 \text{ ή } \mathbf{t = \frac{\ln 2}{\Lambda}}$$

3. Ποσοστό μεταβολής πλάτους σε μία περίοδο

Έστω A_K το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = \kappa T$ και A_{K+1} το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $(\kappa + 1)T$.

Το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του πλάτους είναι:

$$\pi_A\% = \frac{\Delta A}{A_K}100\% = \frac{A_{K+1} - A_K}{A_K}100\% = \left(\frac{A_{K+1}}{A_K} - 1\right)100\% = \mathbf{(e^{-\Lambda T} - 1)100\%}$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι το ποσοστό είναι σταθερό σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης, δηλαδή το ίδιο ποσοστό βρίσκουμε στη χρονική διάρκεια (0 – Τ), (Τ – 2Τ), (2Τ – 3Τ), ...

4. Σχέση ενεργειών

Από τη σχέση $\mathbf{E = E_0 e^{-2\Lambda t}}$ προκύπτει ότι ο λόγος των ενεργειών σε δύο διαδοχικές περιόδους διατηρείται σταθερός: $\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} = \ldots = \frac{E_0}{E_0 e^{-2\Lambda t}} = e^{2\Lambda T}$ ή

$E_1^2 = E_0 \cdot E_2$, $E_2^2 = E_1 \cdot E_3$ και γενικά $\mathbf{E_\nu^2 = E_{\nu-1} \cdot E_{\nu+1}}$

5. Χρόνος υποδιπλασιασμού της ενέργειας

Είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να γίνει η ενέργεια η μισή της αρχικής. Από τη σχέση $E = E_0 e^{-2\Lambda t}$ για $E = \frac{E_0}{2}$ έχουμε:

$$\frac{E_0}{2} = E_0 e^{-2\Lambda t} \text{ ή } \frac{1}{2} = e^{-2\Lambda t} \text{ ή } e^{2\Lambda t} = 2 \text{ ή } 2\Lambda t = \ln 2 \text{ ή } \mathbf{t = \frac{\ln 2}{2\Lambda}}$$

Συγκρίνοντας τους χρόνους υποδιπλασιασμού του πλάτους και της ενέργειας, προκύπτει ότι ο **χρόνος υποδιπλασιασμού της ενέργειας είναι ίσος με το μισό του χρόνου υποδιπλασιασμού του πλάτους**.

6. Μεταβολή της ενέργειας στην πρώτη περίοδο

Εάν E_0 είναι η αρχική ενέργεια ταλάντωσης, σε χρόνο t = T η ενέργεια γίνεται: $E_1 = E_0 e^{-2\Lambda T}$. Επομένως, η μεταβολή της ενέργειας στην πρώτη περίοδο είναι:

$\Delta E = E_1 - E_0$ ή $\Delta E = E_0 e^{-2\Lambda T} - E_0$ ή $\mathbf{\Delta E = E_0(e^{-2\Lambda T} - 1)}$

Η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε θερμότητα.

7. Ποσοστό μεταβολής ενέργειας σε μία περίοδο

Έστω E_K η ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t = κΤ και E_{K+1} η ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή (κ + 1)Τ. Το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας είναι:

$$\pi_E\% = \frac{\Delta E}{E_K}100\% = \frac{E_{K+1} - E_K}{E_K}100\% = \left(\frac{E_{K+1}}{E_K} - 1\right)100\% = \mathbf{(e^{-2\Lambda T} - 1)100\%}$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι το ποσοστό είναι σταθερό σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης.

8. Έργο της δύναμης που αντιστέκεται στην κίνηση

Επειδή η δύναμη F = –bυ συνεχώς αντιστέκεται στην κίνηση, το έργο της είναι **πάντα αρνητικό**. Εάν τη χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E_1 και τη χρονική στιγμή t_2, με $t_2 > t_1$, η ενέργεια ταλάντωσης είναι E_2, το έργο της F δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{W_F = E_2 - E_1}$$

9. Μεγέθη που μεταβάλλονται εκθετικά

Όταν στη φθίνουσα μηχανική ταλάντωση η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση είναι της μορφής F = –bυ, τα μεγέθη που μεταβάλλονται εκθετικά είναι: το πλάτος Α, η ενέργεια Ε της ταλάντωσης, η μέγιστη κινητική ενέργεια K_{max}, η μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max} της ταλάντωσης, η μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$ και η μέγιστη επιτάχυνση $α_{max}$ του σώματος.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.1) Ένα σώμα εκτελεί φθίνουσα μηχανική ταλάντωση με πλάτος που δίνεται από τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Να βρεθούν μέχρι τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε τρεις χρόνους υποδιπλασιασμού:

α) η μείωση της ενέργειας της ταλάντωσης,

β) το ποσοστό στα εκατό της μείωσης της ενέργειας ταλάντωσης,

γ) το ποσοστό στα εκατό της ενέργειας ταλάντωσης που διατηρεί το σώμα.

Απάντηση

α) Υπολογισμός του χρόνου υποδιπλασιασμού του πλάτους

Εάν t_1 ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους, ισχύει:

$$\frac{A_0}{2} = A_0e^{-\Lambda t_1} \text{ ή } e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{2} \text{ ή } \ln e^{-\Lambda t_1} = \ln\frac{1}{2} \text{ ή}$$

Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης είναι:

$$t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

$$-\Lambda t_1 = \ln 1 - \ln 2 \;\; ή \;\; -\Lambda t_1 = -\ln 2 \;\; ή \;\; \Lambda t_1 = \ln 2 \;\; ή \;\; \mathbf{t_1 = \frac{\ln 2}{\Lambda}}$$

Προσδιορισμός του πλάτους σε χρόνο $3t_1$

Τη χρονική στιγμή $t = 3t_1 = 3\dfrac{\ln 2}{\Lambda}$ το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A_1 = A_0^{-3\Lambda\frac{\ln 2}{\Lambda}} \;\; ή \;\; A_1 = A_0 e^{-3\ln 2} \;\; ή \;\; A_1 = A_0 2^{-3} \;\; ή \;\; \mathbf{A_1 = \frac{A_0}{8}}$$

Εύρεση της μείωσης της ενέργειας σε χρόνο $3t_1$

Η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $E_0 = \dfrac{1}{2}DA_0^2$

Η ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t είναι: $E_1 = \dfrac{1}{2}DA_1^2$

Επομένως, η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον με τη μορφή θερμότητας είναι:

$$|\Delta E| = |E_1 - E_0| \;\; ή \;\; |\Delta E| = \left|\frac{1}{2}DA_1^2 - \frac{1}{2}DA_0^2\right|$$

$$ή \;\; |\Delta E| = \frac{1}{2}D\left|\frac{A_0^2}{64} - A_0^2\right| \;\; ή \;\; \mathbf{|\Delta E| = \frac{63}{128}DA_0^2}$$

Η μείωση της ενέργειας οφείλεται στη δύναμη αντίστασης $F = -bυ$, η οποία συνεχώς αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα και τη μεταφέρει στο περιβάλλον με τη μορφή θερμότητας.

β) Το ποσοστό στα εκατό της μείωσης της ενέργειας ταλάντωσης μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι:

$$π\% = \frac{|\Delta E|}{E_0}100\%$$

$$ή \;\; π\% = \frac{\frac{63}{128}DA_0^2}{\frac{1}{2}DA_0^2}100\% \simeq \mathbf{98{,}44\%}$$

Σε μία φθίνουσα ταλάντωση, εάν $π_1\%$ είναι το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης σε χρόνο t_1 και $π_2\%$ το ποσοστό στα εκατό της ενέργειας ταλάντωσης που διατηρεί το σώμα σε χρόνο t_1, ισχύει $|π_1|\% + |π_2|\% = 100\%$.

γ) Το ποσοστό στα εκατό της ενέργειας ταλάντωσης που διατηρεί το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι:

$$π\% = \frac{E_1}{E_0}100\% \;\; ή \;\; π\% = \frac{\frac{1}{2}DA_1^2}{\frac{1}{2}DA_0^2}100\% \;\; ή \;\; π\% = \frac{\frac{A_0^2}{64}}{A_0^2}100\% \simeq \mathbf{1{,}56\%}$$

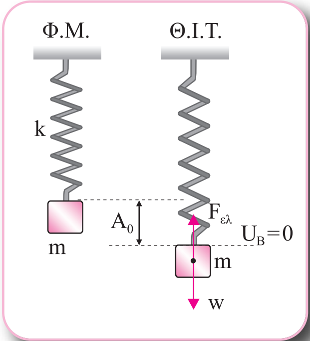
7.2) Σώμα μάζας m, δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, αφήνεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου να εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση, δεχόμενο δύναμη της μορφής F = –bυ. Το σώμα μετά

από πολλές ταλαντώσεις σταματά μόνιμα στη θέση ισορροπίας. Να βρεθεί η συνολική ενέργεια που χάνει το σύστημα. Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη m, g, k.

Απάντηση

1ος τρόπος

Υπολογισμός αρχικής ενέργειας



Εάν το σώμα δε δεχόταν δύναμη της μορφής $F = -bu$, θα εκτελούσε α.α.τ. Το σώμα ξεκινάει την ταλάντωση από την ακραία θέση, επειδή αρχικά δεν έχει ταχύτητα. Το αρχικό πλάτος A_0 είναι ίσο με την απόσταση της θέσης ισορροπίας από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } mg - kA_0 = 0 \text{ ή } A_0 = \frac{mg}{k}$$

Η αρχική ενέργεια ταλάντωσης είναι: $\mathbf{E = \frac{1}{2} DA_0^2}$

Εύρεση απωλειών ενέργειας

Το σύστημα μετά το τέλος της κίνησης δεν έχει ενέργεια ταλάντωσης, άρα όλη την ενέργεια που είχε αρχικά την έχασε. Η ενέργεια αυτή μεταφέρθηκε στο περιβάλλον με τη μορφή θερμότητας. Άρα: $E_{απωλ} = \frac{1}{2} DA_0^2$ ή $E_{απωλ} = \frac{1}{2} k \frac{m^2 g^2}{k^2}$ ή $\mathbf{E_{απωλ} = \frac{m^2 g^2}{2k}}$

2ος τρόπος

Υπολογισμός αρχικής ενέργειας

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του σώματος K, της δυναμικής ενέργειας του σώματος U_B και της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου $U_{ελ}$. Στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, απ' όπου ξεκινά το σώμα την ταλάντωση, ισχύουν: $K = 0$ και $U_{ελ} = 0$.

> Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος.

Θεωρώντας μηδενική στάθμη βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση ισορροπίας του σώματος, έχουμε $U_B = mgA_0$.

Επομένως, η αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι: $\mathbf{E_{μηχ(αρχ)} = mgA_0}$

Υπολογισμός τελικής ενέργειας

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, όπου σταματά το σώμα τελικά, η κινητική και η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι μηδέν, ενώ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kA_0^2$.

Επομένως, η τελική μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι: $\mathbf{E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2}kA_0^2}$

Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον είναι:

$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} - E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)}$ ή $E_{\alpha\pi\omega\lambda} = mgA_0 - \frac{1}{2}kA_0^2$ (1)

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει $mg = kA_0$. Επομένως, η σχέση (1) γίνεται:

$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = kA_0 \cdot A_0 - \frac{1}{2}kA_0^2$ ή $E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{1}{2}kA_0^2$ ή $\mathbf{E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{m^2g^2}{2k}}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε μία φθίνουσα μηχανική ταλάντωση η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση δίνεται από τη σχέση $F = -b\upsilon$. Να βρεθεί η σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

7.3) Εάν ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι $t_{1/2}$, τότε τη χρονική στιγμή $t = 2t_{1/2}$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

α) $\frac{A_0}{4}$ β) $\frac{A_0}{2}$ γ) $\frac{A_0}{2\Lambda}$ δ) $\frac{A_0\sqrt{2}}{2}$

7.4) Εάν A_1, A_2 και A_3 είναι τα πλάτη της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t_1 = T$, $t_2 = 2T$ και $t_3 = 3T$ αντίστοιχα, τότε:

α) $A_2 = \sqrt{A_1A_3}$ β) $A_1 = \sqrt{A_2A_3}$

γ) $A_2 = A_1A_3$ δ) $A_2^2 = A_1^2 + A_3^2$

7.5) Το πλάτος της ταλάντωσης:

α) δεν εξαρτάται από τη σταθερά b.

β) αυξάνεται.

γ) μεταβάλλεται ανάλογα με τον χρόνο.

δ) μεταβάλλεται εκθετικά με τον χρόνο.

7.6) Η μονάδα της σταθεράς Λ είναι:

α) 1 s β) 1 rad/s γ) 1 s^{-1} δ) 1 $kg \cdot s^{-1}$

7.7) Η μονάδα της σταθεράς b είναι:

α) 1 $kg \cdot s$ β) 1 $kg \cdot s^{-1}$ γ) 1 s^{-1} δ) 1 $N \cdot s$

7.8) Η σταθερά απόσβεσης:

α) δεν εξαρτάται από το σχήμα του σώματος.

β) δεν εξαρτάται από το μέγεθος του σώματος.

γ) εξαρτάται από τη φύση του υλικού μέσα στο οποίο γίνεται η ταλάντωση.

δ) εξαρτάται από την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας.

7.9) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη

της ταχύτητας του σώματος, με την πάροδο του χρόνου:
α) η περίοδος μειώνεται,
β) η περίοδος είναι σταθερή,
γ) το πλάτος διατηρείται σταθερό,
δ) η ενέργεια ταλάντωσης διατηρείται σταθερή.

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2010)

7.10) Εάν E_3, E_4 και E_5 είναι οι ενέργειες της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t_3 = 3T$, $t_4 = 4T$ και $t_5 = 5T$ αντίστοιχα, τότε ισχύει:
α) $E_4 = \sqrt{E_3E_5}$ β) $E_4 = E_3E_5$
γ) $E_3 = E_4E_5$ δ) $E_4 = E_3E_5e^{-\Lambda t}$

7.11) Το φυσικό μέγεθος που μειώνεται εκθετικά είναι:
α) η συχνότητα της ταλάντωσης.
β) η ταχύτητα του σώματος.
γ) η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα.
δ) η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του σώματος.

7.12) Εάν μειωθεί η σταθερά b:
α) ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται.
β) ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η ενέργεια της ταλάντωσης μειώνεται.
γ) ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος της ταχύτητας του σώματος μένει σταθερός.
δ) η κίνηση ονομάζεται απεριοδική.

7.13) Το έργο της δύναμης αντίστασης:
α) είναι μηδέν στη διάρκεια δύο περιόδων.
β) είναι θετικό, όταν το σώμα επιταχύνεται.
γ) είναι πάντοτε αρνητικό.
δ) δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που θα ακολουθήσει το σώμα.

7.14) Η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση:
α) είναι πάντοτε αντίθετη της απομάκρυνσης.
β) έχει ίδια φορά με την επιτάχυνση.
γ) έχει ίδια φορά με τη δύναμη επαναφοράς.
δ) είναι πάντοτε αντίθετη της ταχύτητας.

7.15) Ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής $\Sigma F = m\alpha$ έχει τη μορφή:
α) $-b\upsilon = m\alpha$ β) $-b\upsilon + Dx = m\alpha$
γ) $-b\upsilon - Dx = m\alpha$ δ) $-Dx = m\alpha - b\upsilon$

7.16) Με την πάροδο του χρόνου και καθώς τα αμορτισέρ ενός αυτοκινήτου παλιώνουν και φθείρονται:
α) η τιμή της σταθεράς απόσβεσης b αυξάνεται.
β) η τιμή της σταθεράς απόσβεσης b μειώνεται.
γ) το πλάτος της ταλάντωσης του αυτοκινήτου, όταν περνά από εξόγκωμα του δρόμου, μειώνεται πιο γρήγορα.
δ) η περίοδος των ταλαντώσεων του αυτοκινήτου παρουσιάζει μικρή αύξηση.

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2005)

7.17) Ποια πρόταση είναι σωστή;
α) Το μέτρο της δύναμης που προκαλεί την απόσβεση είναι ανάλογο της απομάκρυνσης.
β) Ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών προς την ίδια κατεύθυνση δε διατηρείται σταθερός.

γ) Η περίοδος διατηρείται σταθερή για ορισμένη τιμή της σταθεράς απόσβεσης.
δ) Το μέτρο της δύναμης που προκαλεί την απόσβεση είναι σταθερό.

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2004)

7.18) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση, όπου η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση είναι της μορφής $F_{αντ} = -bυ$, όπου b θετική σταθερά και υ η ταχύτητα του ταλαντωτή, όταν αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης:
α) η περίοδος μειώνεται.
β) το πλάτος διατηρείται σταθερό.
γ) η σταθερά απόσβεσης εξαρτάται από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται.
δ) η ενέργεια ταλάντωσης διατηρείται σταθερή.

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2011)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

Σε μία φθίνουσα μηχανική ταλάντωση η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση δίνεται από τη σχέση $F = -bυ$. Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

7.19) Η δύναμη αντίστασης έχει φορά πάντοτε προς τη θέση ισορροπίας.

7.20) Η σταθερά b εξαρτάται από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος και από τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο γίνεται η ταλάντωση.

7.21) Το έργο της δύναμης αντίστασης είναι αρνητικό, όταν το σώμα επιβραδύνεται, ενώ είναι θετικό, όταν το σώμα επιταχύνεται.

7.22) Αν η σταθερά b είναι μηδέν, τότε η ταλάντωση είναι απεριοδική.

7.23) Ο ρυθμός ελάττωσης της ενέργειας του σώματος αυξάνεται, όταν αυξάνεται η σταθερά b.

7.24) Η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση και η δύναμη επαναφοράς έχουν ταυτόχρονα μέγιστο μέτρο.

7.25) Όταν τα αμορτισέρ των αυτοκινήτων παλιώνουν, το b μειώνεται και η ταλάντωση διαρκεί λιγότερο.

7.26) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται γρηγορότερα από την ενέργεια ταλάντωσης.

7.27) Η κινητική ενέργεια μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο.

7.28) Ο χρόνος υποδιπλασιασμού της ενέργειας δίνεται από τη σχέση $t = \frac{\ln 2}{Λ}$.

7.29) Ο χρόνος υποδιπλασιασμού της ενέργειας είναι ίσος με τον χρόνο υποδιπλασιασμού του πλάτους.

7.30) Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους μειώνεται, όταν αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b.

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2005)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Σε μία φθίνουσα μηχανική ταλάντωση η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση έχει τύπο $F = -bυ$. Να βρεθεί η σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

7.31) Εάν t_1 είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε το πλάτος να γίνει το μισό του αρχικού και t_2 ο χρόνος που απαιτείται ώστε η ενέργεια να γίνει η μισή της αρχικής, τότε ισχύει:
α) $t_1 = 2t_2$ β) $2t_1 = t_2$ γ) $t_1 = t_2$

7.32) Στο χρονικό διάστημα των δύο πρώτων περιόδων, το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του πλάτους είναι ίσο με:
α) $(e^{-2ΛT} - 1)100\%$ β) -50%
γ) $(e^{-ΛT} - 1)100\%$

7.33) Όταν το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται κατά 50%, η ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται κατά:
α) 50% β) 25% γ) 75%

7.34) Όταν η ενέργεια ταλάντωσης μεταβάλλεται κατά 43,75%, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται κατά:
α) 30% β) 75% γ) 25%

7.35) Όταν το πλάτος της ταλάντωσης από A_0 γίνει $\frac{A_0}{8}$, το έργο της δύναμης που αντιστέκεται στην κίνηση είναι:
α) $\frac{-63}{128}DA_0^2$ β) $-\frac{7bυA_0}{8}$ γ) θετικό

7.36) Σε μία πλήρη ταλάντωση το έργο της δύναμης F που αντιστέκεται στην κίνηση είναι:
α) $W_F = 0$ β) $W_F = \frac{1}{2}DA_0^2$
γ) $W_F = E_{ταλ.τελ} - E_{ταλ.αρχ}$

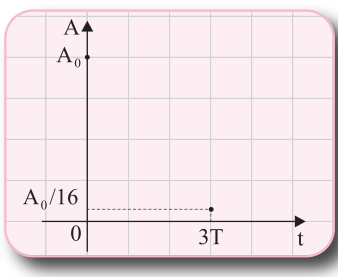
7.37) Όταν πραγματοποιούνται οι κ πρώτες πλήρεις ταλαντώσεις, το πλάτος γίνεται $A_κ$. Όταν πραγματοποιούνται κ επιπλέον ταλαντώσεις, τότε το πλάτος $A_{2κ}$ γίνεται:
α) $\frac{A_κ}{2}$ β) $\frac{A_κ^2}{A_0}$ γ) $\frac{2A_κ^2}{A_0}$

7.38) Μέχρι τη χρονική στιγμή $t = \frac{2\ln 2}{Λ}$ το πλάτος της ταλάντωσης έχει μεταβληθεί κατά:
α) –75% β) –25% γ) –50%

7.39) Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος γίνεται ίση με $\frac{E_0}{4}$ τη χρονική στιγμή:
α) $t = \frac{\ln 2}{4Λ}$ β) $t = \frac{\ln 2}{Λ}$ γ) $t = \frac{\ln 2}{2Λ}$

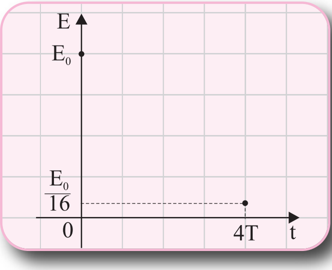
7.40) Εάν E_0 και E_2 είναι η ενέργεια ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t_2 = 2T$ αντίστοιχα, τότε το πηλίκο $\frac{E_2}{E_0}$ είναι:
α) $e^{ΛT}$ β) $e^{-2ΛT}$ γ) $e^{-4ΛT}$

7.41) Από το σχήμα προκύπτει ότι η σταθερά Λ είναι:



α) $\dfrac{2\ln2}{3T}$ β) $\dfrac{\ln2}{3T}$ γ) $\dfrac{4\ln2}{3T}$

7.42) Γνωρίζουμε ότι $\Lambda = \dfrac{\ln2}{2}\, s^{-1}$. Από το σχήμα προκύπτει ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

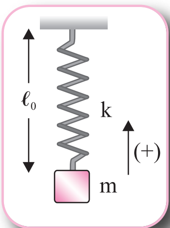


α) $T = 2$ s β) $T = 1$ s γ) $T = 0{,}1$ s

7.43) Όταν πραγματοποιούνται οι β πρώτες πλήρεις ταλαντώσεις, η ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται E_β. Όταν πραγματοποιούνται 2β επιπλέον ταλαντώσεις, η ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται:

α) $\dfrac{E_\beta^3}{E_0^2}$ β) $\dfrac{E_\beta^2}{E_0}$ γ) $\dfrac{E_\beta}{2}$

7.44) Σώμα μάζας m, δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, αφήνεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου να εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή που έχει εκτελέσει την πρώτη ταλάντωση απέχει από το φυσικό μήκος του ελατηρίου:



α) $d=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\Lambda T})$ β) $d=\dfrac{mg}{k}e^{-\Lambda T}$ γ) $d=\dfrac{mg}{k}$

7.45) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ενέργεια ταλάντωσης είναι $E_0 = 12$ J και μετά από N ταλαντώσεις η μείωση της ενέργειας ταλάντωσης είναι 9 J. Εάν τη χρονική στιγμή $t = NT$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι A_N, τότε:

α) $A_0 = 4A_N$ β) $A_0 = 2A_N$ γ) $A_0 = 6A_N$

7.46) Τη χρονική στιγμή $t_4 = 4T$ το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι $A_4 = \dfrac{A_0}{4}$.

Η θερμότητα Q που εκλύεται από τη χρονική στιγμή t_4 μέχρι το σώμα να εκτελέσει 16 επιπλέον ταλαντώσεις δίνεται από τη σχέση:

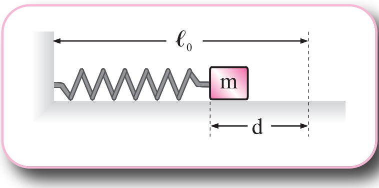
α) $Q = \dfrac{2m\pi^2}{T^2 \cdot 4^{10}} A_0^2 (4^8 - 1)$

β) $Q = \dfrac{m\pi^2}{T^2 \cdot 4^{10}} A_0^2 (4^8 - 1)$

γ) $Q = \dfrac{m\pi^2}{2T^2 \cdot 4^{10}} A_0^2 (4^8 - 1)$

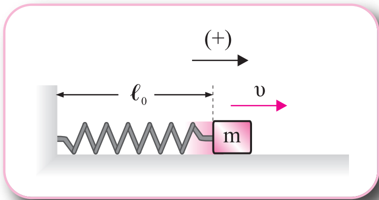
Β. Σε μία φθίνουσα μηχανική ταλάντωση η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση είναι η τριβή ολίσθησης. Να βρεθεί η σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

7.47) Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζόντιου επιπέδου είναι μ. Εκτρέπουμε το σώμα κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το συνολικό διάστημα s που διανύει το σώμα μέχρι να σταματήσει μόνιμα στο φυσικό μήκος του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:



α) $s = \dfrac{kd^2}{\mu mg}$ β) $s = \dfrac{kd^2}{2\mu mg}$ γ) $s = 2d$

7.48) Σώμα μάζας m ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k που βρίσκεται επάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζόντιου επιπέδου είναι μ. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ προσδίδουμε στο σώμα ταχύτητα μέτρου υ. Εάν το σώμα σταματά στιγμιαία στις θέσεις Β και Γ για πρώτη και για δεύτερη φορά αντίστοιχα και οι αντίστοιχες μεταβολές του μήκους του ελατηρίου είναι x_1 και x_2, ποια σχέση είναι σωστή;



α) $x_1 - x_2 = \dfrac{\mu mg}{2k}$

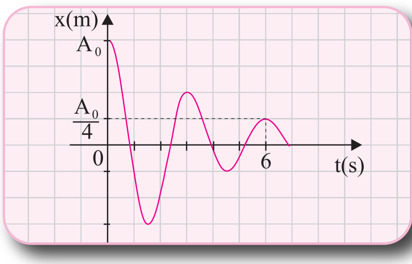
β) $x_1 - x_2 = \dfrac{\mu mg}{k}$

γ) $x_1 - x_2 = \dfrac{2\mu mg}{k}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.49) Το πλάτος σε μία φθίνουσα ταλάντωση μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$ και η απομάκρυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από το σχήμα.

Να βρεθούν:



α) η σταθερά Λ,

β) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 6$ s.

7.50) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση ισχύει $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ενέργεια ταλάντωσης είναι E_0, ενώ τη χρονική στιγμή $t = 1$ s η ενέργεια γίνεται $\frac{E_0}{16}$. Το σώμα ξεκινάει την ταλάντωσή του από τη μέγιστη απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t = 0$. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σώμα να διέλθει από τη θέση ισορροπίας για πρώτη φορά είναι 0,25 s.
Να βρεθούν:

α) η σταθερά Λ,

β) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του πλάτους της ταλάντωσης στη διάρκεια της πρώτης περιόδου.

7.51) Το πλάτος σε μία φθίνουσα ταλάντωση μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_0 = 0{,}1$ m, ενώ τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος είναι $A_1 = 0{,}025$ m. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές:

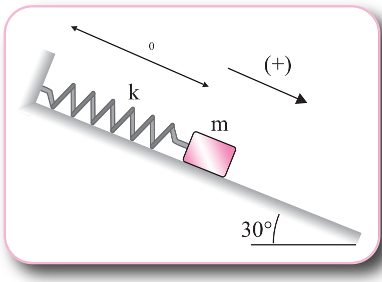
α) $t_2 = 3t_1$ β) $t_3 = \frac{t_1}{2}$

7.52) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση ισχύει $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_0 = 80$ J, ενώ τη χρονική $t_2 = 2T$ η ενέργεια είναι $E_2 = 20$ J.
Να βρεθούν:

α) η ενέργεια της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t_1 = T$ και $t_3 = 3T$,

β) τα ποσοστά στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου και κατά τη διάρκεια της δεύτερης περιόδου.

7.53) Ένα σώμα μάζας $m = 2$ kg είναι προσδεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 800$ N/m, το οποίο βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας 30°. Το σώμα αφήνεται ελεύθερο από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, οπότε εκτελεί αμείωτη ταλάντωση.



α) Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Κάποια χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της κίνησής του το σώμα δέχεται δύναμη $F = -bυ$. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F από την αρχική θέση μέχρι το σώμα να σταματήσει μόνιμα.

7.54) Η σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$ περιγράφει τη μεταβολή του πλάτους σε μία φθίνουσα ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το πλάτος είναι A_0 και η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E_0. Όταν το σώμα εκτελεί τις πρώτες κ πλήρεις ταλαντώσεις, το πλάτος μειώνεται κατά 20%. Όταν έχουν γίνει επιπλέον

3κ πλήρεις ταλαντώσεις, το πλάτος είναι A' και η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E'.

α) Να βρεθεί το πλάτος A' σε συνάρτηση με το A_0.

β) Να υπολογιστεί ο λόγος $\dfrac{E'}{E_0}$.

7.55) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση ενός σώματος ισχύει $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μέγιστη ταχύτητα του σώματος που αντιστοιχεί στο αρχικό πλάτος είναι $\upsilon_0 = 20$ m/s, ενώ τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s η αντίστοιχη μέγιστη ταχύτητα είναι $\upsilon_1 = 10$ m/s. Να βρεθούν:

α) η σταθερά Λ,

β) η μέγιστη ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_3 = 30$ s,

γ) η χρονική στιγμή στην οποία η μέγιστη ταχύτητα είναι $\upsilon = 2$ m/s,

δ) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του πλάτους της ταλάντωσης μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0$ και $t_2 = 20$ s.

7.56) Το πλάτος σε μία φθίνουσα ταλάντωση μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Το ποσοστό στα εκατό της μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης στη διάρκεια της πρώτης περιόδου είναι 87,5%. Να βρεθούν τα αντίστοιχα ποσοστά μεταβολής:

α) της μέγιστης ταχύτητας,

β) της μέγιστης επιτάχυνσης,

γ) της ενέργειας της ταλάντωσης.

7.57) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση ισχύει $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να μεταβεί από τη μία ακραία θέση στην άλλη είναι $\Delta t = 2$ s. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_0 = 160$ J, ενώ τη χρονική στιγμή $t = 2T$ η ενέργεια είναι $E_2 = 10$ J. Να βρεθούν:

α) η ενέργεια που έχασε το σύστημα στη διάρκεια της πρώτης ταλάντωσης,

β) η σταθερά Λ,

γ) ο λόγος $\dfrac{\alpha_{2max}}{\alpha_{0max}}$, όπου α_{2max} και α_{0max} είναι οι μέγιστες επιταχύνσεις που αντιστοιχούν στα πλάτη A_2 και A_0,

δ) η χρονική στιγμή στην οποία το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με $\dfrac{A_0}{8}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

7.58) Το πλάτος μίας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Όταν πραγματοποιούνται οι 10 πρώτες ταλαντώσεις, το πλάτος γίνεται $\dfrac{A_0}{4}$. Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη A_0, Λ και D. Να βρεθούν:

α) το πλάτος της ταλάντωσης, όταν το σώμα έχει εκτελέσει επιπλέον 30 ταλαντώσεις,

β) η θερμότητα που παράγεται στο χρονικό διάστημα των 20 πρώτων ταλαντώσεων,

γ) ο χρόνος στον οποίο η ενέργεια θα γίνει $\dfrac{E_0}{8}$.

7.59) Ένα μικρό σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, το πλάτος της οποίας μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Στα πρώτα 2 s το σώμα εκτελεί 40 πλήρεις ταλαντώσεις και η ενέργεια έχει μειωθεί στο 25% της αρχικής της τιμής. Να βρεθούν:

α) η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης,

β) η σταθερά Λ,

γ) το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 4$ s,

δ) το έργο της δύναμης που αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 4$ s.

Δίνονται: $A_0 = 0{,}1$ m και $E_0 = 8$ J.

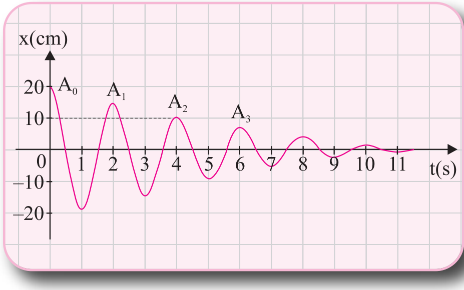
7.60) Το πλάτος μίας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Να βρεθούν:

α) ο χρόνος t_1, για να γίνει η ενέργεια ταλάντωσης ίση με το 12,5% της αρχικής τιμής της,

β) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης σε μία περίοδο, εάν σε κάθε πλήρη ταλάντωση το πλάτος μειώνεται κατά 20%,

γ) το συνολικό έργο της δύναμης αντίστασης μέχρι το σώμα να σταματήσει μόνιμα. Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη A_0, Λ και D.

7.61) Το πλάτος μίας φθίνουσας ταλάντωσης ενός σώματος μάζας m = 2 kg μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης δίνεται από το σχήμα. Να βρεθούν:



α) η σταθερά Λ,

β) η μέγιστη απομάκρυνση τη χρονική στιγμή t = 2 s,

γ) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης στη διάρκεια της δεύτερης περιόδου,

δ) το έργο της δύναμης αντίστασης στη διάρκεια των δύο πρώτων ταλαντώσεων. ($\pi^2 = 10$)

7.62) Σώμα εκτελεί φθίνουσα μηχανική ταλάντωση με πλάτος που δίνεται από τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Σε χρόνο $t_1 = 6T$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης, το πλάτος υποδιπλασιάζεται.

α) Να αποδειχτεί ότι τα ποσοστά μεταβολής του πλάτους και της ενέργειας σε κάθε περίοδο είναι σταθερά.

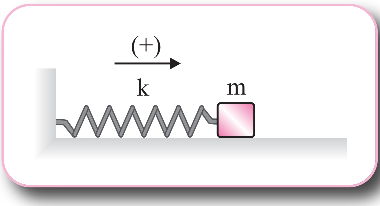
β) Εάν E_1' και E_2' είναι οι ενέργειες που χάνει το σώμα λόγω της δύναμης αντίστασης στη διάρκεια της πρώτης και της δεύτερης περιόδου αντίστοιχα, να αποδειχτεί η σχέση $E_0(E_1 - E_2') = (E_0 - E_1')^2$.

γ) Να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 18 πλήρεις ταλαντώσεις από την έναρξη της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το αρχικό πλάτος A_0.

δ) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που αντιστέκεται στην κίνηση από τη χρο-

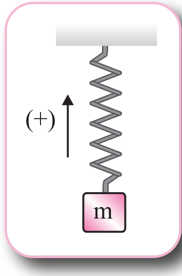
νική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 6T$ σε συνάρτηση με τη σταθερά επαναφοράς D και το αρχικό πλάτος A_0.
ε) Να βρεθεί το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης στο χρονικό διάστημα από $t_1 = 6T$ έως $t_2 = 18T$.

7.63) Ένα σώμα μάζας $m = 2$ kg, δεμένο σε οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 200$ N/m, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

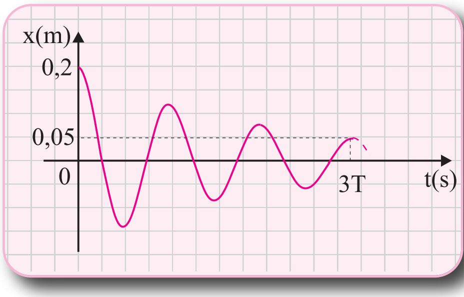


Α. Όταν η δύναμη επαναφοράς που δέχεται το σώμα έχει αλγεβρική τιμή $F_{επ} = -12$ N, η ταχύτητά του έχει αλγεβρική τιμή $υ = 0{,}8$m/s. Να υπολογιστεί το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης.
Β. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0{,}1$m, δέχεται δύναμη της μορφής $F = -bυ$, οπότε αρχίζει να εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, χωρίς να μεταβληθεί η περίοδος T. Μετά από τις τρεις πρώτες πλήρεις φθίνουσες ταλαντώσεις το πλάτος της ταλάντωσης έχει μεταβληθεί κατά 40%. Να υπολογιστούν:
$β_1$) η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος μετά από τις τρεις πρώτες ταλαντώσεις,
$β_2$) η σταθερά Λ.

7.64) Στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου είναι στερεωμένο σώμα Σ, με μάζα m = 4kg, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος που μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-Λt}$,



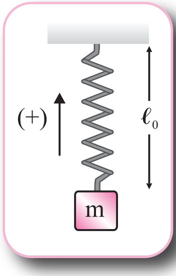
με $Λ = \frac{\ln 2}{3}\, s^{-1}$. Η γραφική παράσταση περιγράφει πώς μεταβάλλεται η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο. Να υπολογιστούν:



α) η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης (που θεωρούμε ότι είναι ίση με την περίοδο της αμείωτης ταλάντωσης) και η σταθερά του ελατηρίου,
β) το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 6T$,
γ) το έργο της δύναμης αντίστασης από τη χρονική στιγμή $t_1 = 3T$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 6T$,
δ) το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου τη χρονική στιγμή $t_1 = 3T$.

7.65) Στο ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N/m ισορροπεί σώμα Σ, με μάζα $m = 4$ kg.

Α. Φέρνουμε το σώμα στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν:



α$_1$) η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης,

α$_2$) η αλγεβρική τιμή της δύναμης του ελατηρίου, όταν ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος έχει αλγεβρική τιμή $\frac{dp}{dt} = -20\ kg \cdot m/s^2$.

Β. Τη χρονική στιγμή που το σώμα ολοκληρώνει μία πλήρη ταλάντωση δέχεται δύναμη της μορφής $F = -bυ$. Θεωρούμε ότι η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με την περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Εάν $Λ = ln2 s^{-1}$, να υπολογιστούν:

β$_1$) η χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια ταλάντωσης έχει μειωθεί κατά 75%,

β$_2$) το συνολικό έργο της δύναμης αντίστασης F μέχρι το σώμα να σταματήσει μόνιμα.